	GALERÍA MATEMÁTICA
	GEOMETRÍA DEL ESPACIO Problemas Master
	Estrategias de Resolución

Disposición práctica

En esta colección de Problemas, se trata de que el alumno haga un Planteamiento que considere varias de las estrategias posibles y elija la idónea, la óptima, para resolverlo. Se le da como resultado el correspondiente al planteamiento que denominamos **P-óptimo** que a veces se acompaña de un **P-alternativo** cuando están equilibradas ambas estrategias, con ventajas de una u otra, según qué aspectos valoremos.

A veces la diferencia radica sólo en los diferentes recursos matemáticos usados

Un **método básico**, latente en todos los Ejercicios, es el viejo método mixto de

1º) *SUPONER EL PROBLEMA RESUELTO*, completado con el método de

2º) *DIBUJAR UN "MONO"* (esquema gráfico sencillo) *DE LA SITUACIÓN*

Problema nº 1

Deducir si están o no alineados los puntos: $A = [1, 2, 0]$, $B = [3, -3, -1]$, $C = [5, -8, -2]$

$$A = [1, 2, 0], B = [3, -3, -1], C = [5, -8, -2]$$

P) PLANTEAMIENTO

De Álgebra Lineal

Pa) Si no estuviesen alineados los puntos A , B y C, los vectores AB y AC serían l.i. (linealmente independientes)

Y también los vectores OA ,OB y OC serían l.i. => el producto mixto $[OA, OB, OC] \neq 0$ (número real no nulo)

Pb) No alineados => área de ABC no nula : $|AB \times AC| \neq 0$ (el producto vectorial $AB \times AC \neq 0$: no sería el vector nulo, y su módulo no sería cero)

De Geometría analítico-vectorial

Pc) Si están alineados forman una recta r , que con el origen $O(0, 0, 0)$ determina un plano y los vectores OA, OB

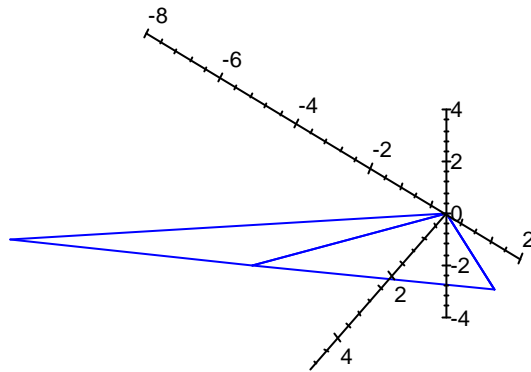
y OC serían coplanarios => el volumen del paralelepípedo que determinan sería nulo

P-óptimo) El determinante que forman los vectores fila (columna) **OA** , **OB** y **OC** decide la posición

Si es nulo están alineados. Si es no nulo no están alineados y forman un triángulo en el espacio

Resolución

Gráfica inicial



$$A = [1, 2, 0], B = [3, -3, -1], C = [5, -8, -2], OA, OB, OC$$

P-óptimo)

$$A = [1, 2, 0], B = [3, -3, -1], C = [5, -8, -2]$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 5 & -8 & -2 \end{bmatrix}, \text{Det}(M) = 0$$

Resultado : Están alineados y no forman un triángulo

Pa)

El determinante anterior demuestra que $\{ OA, OB, OC \}$ son un sistema ligado, no libre, y que son l.d.

Otra forma de llegar a esa conclusión :

Supongamos que :

$$\lambda [1, 2, 0] + \mu [3, -3, -1] + \nu [5, -8, -2] = [0, 0, 0]$$

$$[\lambda + 3\mu + 5\nu, 2\lambda - 3\mu - 8\nu, -\mu - 2\nu] = [0, 0, 0]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}, O3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, S = [\lambda + 3\mu + 5\nu, 2\lambda - 3\mu - 8\nu, -\mu - 2\nu]$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & -8 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, HI = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicamos Gauss a HI

$$G(HI) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rg}(HI) = 2, \text{Det}(H) = 0$$

Al ser un sistema homogéneo hay soluciones (distinta de la trivial $[0, 0, 0]$) : Aplicamos Gauss-Jordan

$$GJ(HI) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[x = z, y = -2z, z = z], [\rho, -2\rho, \rho], \{ [1, -2, 1] \}$$

Al existir una solución distinta de la trivial $[\lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0] \Rightarrow \mathbf{OA}, \mathbf{OB}$ y \mathbf{OC} son l.d.

Pb)

$$\mathbf{AB} = [2, -5, -1], \mathbf{AC} = [4, -10, -2]$$

El producto vectorial (p_v) de $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$ es el vector cero $[0,0,0]$ y su módulo nulo:

$$p_v([2, -5, -1], [4, -10, -2]) = [0, 0, 0], |\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = 0$$

El módulo del producto vectorial $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$ es nulo. Pero los vectores \mathbf{AB} y \mathbf{AC} no son el vector nulo. Sus módulos son :

$$|[2, -5, -1]| = \sqrt{30}, |[4, -10, -2]| = 2\sqrt{30}$$

\Rightarrow que el ángulo $\text{ang}(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = 0$: se superponen, son proporcionales

$$\text{ang}([2, -5, -1], [4, -10, -2]) = \arccos\left(\frac{1}{60}\sqrt{30}\sqrt{120}\right)$$

$$\frac{1}{60}\sqrt{30}\sqrt{120} = 1, \text{ang}(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = 0$$

Problema nº 2

Investigar si son o no coplanarios los puntos : $A = [1, 0, 4], B = [3, 0, 1], C = [2, 0, 0], L = [0, 4, 0]$

$$A = [1, 0, 4], B = [3, 0, 1], C = [2, 0, 0], L = [0, 4, 0]$$

P-óptimo)

Los puntos si no están alineados forman un tetraedro de volumen no nulo

El volumen del tetraedro es $V = \frac{[\mathbf{LA}, \mathbf{LB}, \mathbf{LC}]}{6}$,

donde el numerador es el producto mixto de los vectores \mathbf{LA}, \mathbf{LB} y \mathbf{LC}

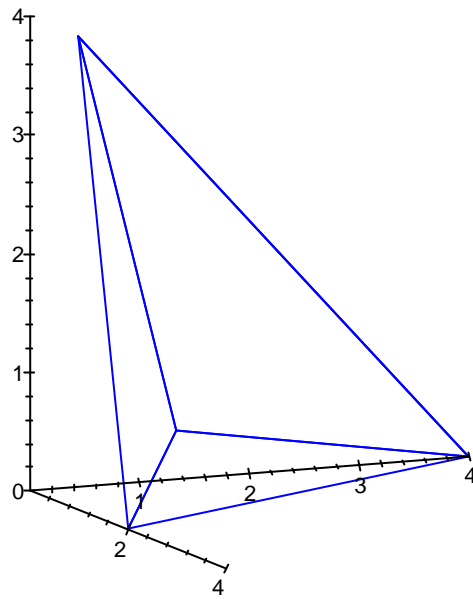
Resolución

P-óptimo)

$$A = [1, 0, 4], B = [3, 0, 1], C = [2, 0, 0], L = [0, 4, 0]$$

$$\mathbf{LA} = [1, -4, 4], \mathbf{LB} = [3, -4, 1], \mathbf{LC} = [2, -4, 0]$$

Grafica previa



LA, LB, LC

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -20$$

El producto mixto de LA, LB y LC vale : $\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -20$

El volumen del tetraedro LABC es $\frac{20}{6} \neq 0 \Rightarrow$ no son coplanarios

