


<p style="text-align: center;"><b>MATHpines</b></p>  <p style="text-align: center;">Prof. M.Díaz-Pinés</p>	<b>GALERÍA MATEMÁTICA</b>
	<b>GEOMETRÍA</b> Cuestiones geométricas
	<b>El problema de la Pendiente</b>

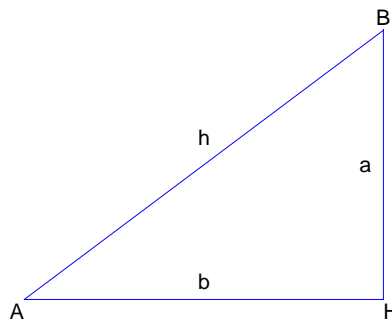
### EL PROBLEMA DE LA " PENDIENTE "

En la **Vuelta a España** de 2002 hubo una etapa especialmente dura, que sirvió para determinar los primeros puestos de la clasificación general final: la etapa de la subida al alto de **El Angliru** ó L' Anglirú.

Se trataba de una cuesta muy pronunciada. La información técnica de la Vuelta señalaba que en su tramo más empinado la pendiente era del 23'6%

Y aquí surge el problema matemático. ¿A qué pendiente se refiere esa información técnica?

La pendiente de nuestras carreteras, señalizada por el Ministerio de Fomento (antes Obras Públicas), y que es la que maneja la DGT (*Dirección General de Tráfico*) y las diferentes Vueltas ciclistas, significa el cociente entre el desnivel vertical alcanzado dividido por la distancia recorrida sobre la propia carretera.



#### **Pendiente de Tráfico**

Si en el triángulo anterior llamamos, como es habitual en Matemáticas, a cada lado por la letra del vértice opuesto pero minúscula, tenemos que si denominamos por  $k_T$  a la pendiente de Tráfico:

$$k_T = \frac{BH}{AH} = \frac{a}{b}$$

#### **Pendiente matemática**

La pendiente de una rampa, en el uso ordinario, es el cociente entre la longitud de su altura (vertical) dividido por la longitud de su base (horizontal).

Este concepto es el que se maneja en la calle, de modo ordinario, y es -precisamente- el concepto matemático de pendiente.

Si designamos por  $k$  la pendiente matemática u ordinaria, tenemos :

$$k = \frac{BH}{AH} = \frac{a}{b}$$

#### **Referencia a la Trigonometría**

Si en el triángulo anterior consideramos el ángulo A, es decir el ángulo  $HAB$  y lo denominamos  $\alpha$ , resulta que  $\alpha$  es el ángulo que mide la inclinación de la rampa  $AB$ , que es la hipotenusa del triángulo  $AHB$  anterior. El cateto horizontal  $AH = b$  nos da el recorrido horizontal o base de la rampa.

El cateto vertical  $BH = a$  nos da la altura de la rampa o la longitud del ascenso que nos proporciona la rampa. Si recordamos que:

$$\sin(\alpha) = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{h} \left( \frac{\text{cateto - opuesto}}{\text{hipotenusa}} \right), \quad \cos(\alpha) = \frac{AH}{AB} = \frac{b}{h} \left( \frac{\text{cateto - contiguo}}{\text{hipotenusa}} \right),$$

y que  $\text{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{BH}{AH} = \frac{a}{b} \left( \frac{\text{cateto - opuesto}}{\text{cateto - contiguo}} \right)$ , entonces :

*Pendiente de Tráfico* :  $k_T = \sin(\alpha)$

*Pendiente matemática u ordinaria* :  $k = \text{tg}(\alpha)$

$$\text{Como } h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow k_T = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{y } k = \frac{a}{b} \Rightarrow k_T = \frac{\left[ \frac{a}{b} \right]}{\sqrt{1 + \left[ \frac{a}{b} \right]^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}$$

Fórmula que relaciona ambas pendientes :

$$k_T = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}$$

Trigonométricamente la relación equivalente se obtiene así

$$k_T = \sin(\alpha), \quad k = \text{tg}(\alpha)$$

$$\text{tg}(\alpha)^2 = \frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2} = \frac{\sin(\alpha)^2}{1 - \sin(\alpha)^2} \Rightarrow \text{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin(\alpha)^2}} \Rightarrow$$

$$k = \frac{k_T}{\sqrt{1 - k_T^2}}$$

### Conclusión

La pendiente matemática u ordinaria  $k$  es la tangente del ángulo inclinación  $\alpha$

La pendiente de Tráfico y de las carreteras  $k_T$  es el seno del ángulo inclinación  $\alpha$

### Cálculo de la máxima inclinación de la subida al Angliru

Tenemos el dato de que  $k_T = 23.6 \% = 0.236$

Ahora resolvemos la ecuación trigonométrica  $\sin(\alpha) = 0.236$

Lo podemos hacer con la calculadora :

$$\sin^{-1}(0.236) = 13.65^\circ = 0.2382 \text{ rad}$$

Con MapleV, calculamos de modo automático :

En radianes :

$$\sin(\alpha) = .236$$

$$\alpha = .2382, \text{ radianes}$$

$$\alpha = 0.238 \text{ radianes}$$

Pasamos a grados sexagesimales ( 1 radián =  $\frac{180}{\pi}$  grados =  $57^\circ 17' 24''$  )

Cálculo del valor en grados de 1 radián:

$$\frac{180}{\pi}$$

$$\pi$$

$$57.29$$

$58^\circ + 0.29^\circ$ . Multiplicamos 0.29 por 60 y obtenemos 17.40 minutos

$$17.40$$

$17' + 0.4'$  Multiplicamos 0.4 por 60 y obtenemos 24''

$$24.00$$

1 radián =  $57^\circ 17' 24''$

$$\alpha = 13.65, \text{ grados}$$

Cálculo en grados y minutos del ángulo  $13.65^\circ$

$$13.65$$

$13^\circ + 0.65^\circ$ . Multiplicamos 0.65 por 60 y obtenemos 39'

$$39.00$$

$$13.65^\circ = 13^\circ 39'$$

La inclinación del tramo más empinado es de  $13^\circ 39'$

**Pendiente matemática**

$$k = \frac{k_T}{\sqrt{1 - k_T^2}}$$

$$k = .2428$$

Cuestión: ¿Es un caso especial el Angliru que hace que  $k_T < k$  ?

No. Siempre es así , pues  $k_T \leq k$

Cuestión: ¿Hay algún caso en que  $k = k_T$  ?

Sí. Cuando la rampa es horizontal y el tramo es horizontal . Entonces  $\alpha = 0 \Rightarrow k = 0$  ,  $k_T = 0$

Demostración

Partimos de que  $k_T = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}$

Entonces,  $\frac{k_T}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}$  Pero si  $k \neq 0$  ,  $1 + k^2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} < 1 \Rightarrow \frac{k_T}{k} < 1$

Otra forma de hacer la demostración: Partimos de que  $\text{tg}(\alpha)^2 = \frac{\sin(\alpha)^2}{1 - \sin(\alpha)^2}$

Como  $1 - \sin(\alpha)^2 \leq 1$  y  $0 \leq 1 - \sin(\alpha)^2 \Rightarrow \sin(\alpha)^2 \leq \text{tg}(\alpha)^2 \Rightarrow k_T^2 \leq k^2 \Rightarrow k_T \leq k$

Comprobación del ángulo de inclinación

Sabemos que  $k = 0.2428$

$$\tan(\alpha) = .2428$$

Resolvemos esta ecuación

Con la calculadora  $\tan^{-1}(0.2428) = 0.2428$

$$\alpha = .2382, \text{radianes}$$

$$\alpha = 13.65, \text{grados}$$

c.q.c. (como queríamos comprobar. No ¡ caiga quien caiga ... !)

Podemos hacer una **Tabla**

Tomamos ángulos  $\alpha$  comprendidos entre 0 y  $\frac{5\pi}{12}$  radianes . Con valores exactos y aproximados de las pendientes

$\alpha(\text{radianes})$	$k_T = \sin(\alpha)$	$k = \text{tg}(\alpha)$	$\alpha(\text{radianes})$	$k_T = \sin(\alpha)$	$k = \text{tg}(\alpha)$
0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{6}\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$	$2 - \sqrt{3}$	$\frac{1}{12}\pi$	.2588	.268
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{6}\pi$	.5000	.5773
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{4}\pi$	.7070	1.
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\pi$	.8660	1.732
$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{6}\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$	$2 + \sqrt{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	.9655	3.732

Si la rampa fuese inclinándose hasta acercarnos a la vertical :

Hemos de hallar los límites por la izquierda de  $\sin(\alpha)$  y de  $\text{tg}(\alpha)$  cuando  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$k_T \rightarrow 1$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow (1/2\pi)^-} \sin(\alpha) = 1$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow (1/2\pi)^-} \tan(\alpha) = \infty$$

$$k \rightarrow \infty$$

