

EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN LAS MATEMÁTICAS

8.1. Las pruebas de Matemáticas

En las clases de Matemáticas se desarrollaron durante la experimentación dos unidades didácticas: *Proporcionalidad* y *Sucesiones y progresiones*, que ofrecían la posibilidad de valorar y comparar el resultado de las dos metodologías en diferentes aspectos. Se trata, en los dos casos, de unidades que integran de manera equilibrada aspectos conceptuales y destrezas, y proporcionan problemas en los que se pueden poner en juego las estrategias de resolución adecuadas. Hay entre ellas, sin embargo, una diferencia importante; la *Proporcionalidad* retoma contenidos que se han ido trabajando en cursos anteriores, mientras que la unidad de *Sucesiones y progresiones* maneja ideas y procedimientos nuevos para los alumnos de este curso.

Las pruebas de evaluación de Matemáticas estaban formadas por una colección de 28 y 29 ítems de respuesta cerrada, que permitían valorar en su conjunto la competencia de los alumnos participantes en los contenidos desarrollados y hacían posible, también, la evaluación de algunos aspectos que interesaba comparar. La construcción de los ítems se hizo de modo que las respuestas no correctas respondieran a conceptos mal contruidos, errores más o menos frecuentes en la aplicación de destrezas o estrategias de razonamiento alternativas a la correcta y que no llevan a la solución. Esto se puede apreciar en el ítem del ejemplo siguiente:

Si n es un número cualquiera, el doble del anterior es:

a) $2(n - 1)$

b) $2n - 1$

c) $2(n + 1)$

d) $2n + 1$

Las respuestas incorrectas de este ítem reflejan algunos errores en la simbolización:

Respuesta b): Confusión del doble del anterior con el anterior del doble.

Respuesta c): Confusión de la simbolización del anterior con la del siguiente.

Respuesta d): Se dan los dos errores anteriores

Este tipo de ítems permite poner de manifiesto el grado de conocimiento de los conceptos matemáticos que se manejan y hace posible también apreciar la competencia en la aplicación de destrezas o en la resolución de problemas. Los dos ejemplos siguientes recogen el contenido de dos ítems que se dirigen a contenidos de distinto tipo:

Una casa discográfica saca al mercado un CD. La primera semana vende 40 000 copias y, a partir de entonces, cada semana vende la mitad que la anterior. ¿Cuántos vende la cuarta semana?

a) 10 000 b) 5 000 c) 2 500 d) Ninguno, porque se han agotado.

En una sucesión el término general es $a_n = 4 \cdot 0,2^{n-1}$. Entonces:

a) *Es una progresión geométrica cuya razón es 0,2.*

b) *Es una progresión geométrica cuya razón es 4.*

c) *Es una progresión aritmética cuya diferencia es 0,2.*

d) *Es una progresión aritmética cuya diferencia es 4.*

La evaluación de algunas destrezas requiere, sin embargo, el planteamiento de cuestiones abiertas, en las que no se da ninguna pauta al alumno. En cada una de las pruebas se incluyeron algunos ítems de este tipo como en este ejemplo:

Escribe los cinco primeros términos de la sucesión cuyo término general es

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{3}{n}$$

$a_1 = \dots\dots\dots$, $a_2 = \dots\dots\dots$, $a_3 = \dots\dots\dots$, $a_4 = \dots\dots\dots$, $a_5 = \dots\dots\dots$

La prueba inicial debía hacer posible la determinación de los conocimientos de los alumnos sobre los contenidos que iban a desarrollarse en cada una de las unidades. En relación con ello, cada una de las unidades representaba un problema diferente. La unidad didáctica sobre *Proporcionalidad* recoge contenidos que se van tratando a lo largo de toda la etapa, y que a menudo se inician al final de la Educación Primaria. Los alumnos de 3.º de ESO han tenido oportunidad de aprender ideas progresivamente más complejas sobre la proporcionalidad y han podido desarrollar algunas destrezas relacionadas con la obtención de términos proporcionales y porcentajes. Es muy relevante, por ello, apreciar qué saben sobre la *Proporcionalidad* y qué saben hacer cuando se plantean situaciones con magnitudes proporcionales.

Por el contrario, la unidad sobre *Sucesiones y progresiones* no parte aparentemente de contenidos anteriores. Su aprendizaje se construye mejor en la medida en que la formación matemática global de los estudiantes sea adecuada, si bien es cierto que algunas destrezas concretas pueden ayudar bastante, como lo hace el desarrollo de algunas capacidades generales. Es el caso de las que permiten, por ejemplo, apreciar mejor la estructura de un conjunto ordenado de números.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, la prueba inicial debía dar información, simultáneamente y de manera equilibrada, de los conocimientos concretos de los alumnos participantes acerca de los contenidos previos a los que se iban a tratar en cada unidad, principalmente en la de *Proporcionalidad*, y de su competencia global en Matemáticas.

Por otra parte, convenía tener la oportunidad de valorar posibles diferencias en los aprendizajes relativos a los conceptos matemáticos puestos en juego, a las destrezas de cálculo asociadas a estos contenidos y a las formas y estrategias desarrolladas en tareas de resolución de problemas. De este modo, la prueba inicial contenía ítems dirigidos a la valoración de cada uno de estos tres aspectos. La necesidad de mantener el equilibrio entre todos los aspectos indicados llevó a construir la prueba con el esquema que se recoge en el cuadro 8.1.

Al finalizar el periodo de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de ambas unidades didácticas se pasó una segunda prueba, esta vez dirigida a determinar los aprendizajes que se habían producido a lo largo de las cuatro o cinco semanas de enseñanza. Esta prueba final (cuadro 8.2) comparte algunas características con la inicial, pero se diferencia de ella en cuanto al momento en que se pasa y en su finalidad. Está construida con ítems del mismo tipo, que permiten también diferenciar los diferentes tipos de contenido.

Cuadro 8.1. Estructura de la prueba inicial:

| | Proporcionalidad | Sucesiones | Otros contenidos | Toda la prueba |
|-------------------------|------------------|------------|------------------|----------------|
| Desarrollo de conceptos | 13,8 % | 13,8 % | | 27,6 % |
| Destrezas | 17,2 % | 17,2 % | 24,1 % | 55,2 % |
| Resolución de problemas | 13,8 % | 6,9 % | 3,4 % | 24,1 % |
| | 34,5 % | 34,5 % | 31 % | |

Nota: Alguno de los ítems responde a más de un tipo de contenido, por lo que los diferentes apartados de este cuadro no son excluyentes.

Cuadro 8.2. Estructura de la prueba final:

| | Proporcionalidad | Sucesiones | Toda la prueba |
|-------------------------|------------------|------------|----------------|
| Desarrollo de conceptos | 21,4 % | 14,3 % | 35,7 % |
| Destrezas | 14,3 % | 21,4 % | 35,7 % |
| Resolución de problemas | 21,4 % | 14,3 % | 35,7 % |
| | 57,1 % | 42,9 % | |

Nota: Alguno de los ítems responde a más de un tipo de contenido, por lo que los diferentes apartados de este cuadro no son excluyentes.

Las cuestiones planteadas en los ítems de esta segunda prueba se derivan de los contenidos que se han tratado en las unidades. Son, por tanto, ítems diferentes que tratan de reflejar los aprendizajes realizados por los alumnos a lo largo del periodo en el que se lleva a cabo la experiencia. Se centran en contenidos tratados en cada una de las dos unidades didácticas.

La prueba de recuerdo, propuesta varios meses después, es idéntica a la prueba final, ya que durante el periodo intermedio no se ha producido enseñanza intencionada de esos contenidos. Esto facilita la comparación directa de los resultados.

8.2. Los resultados de Matemáticas

Los resultados de la prueba inicial reflejan pequeñas diferencias de partida entre los alumnos de los grupos en los que se iba a aplicar la metodología habitual y los de grupos en los que se utilizarían las nuevas tecnologías. En los segundos es ligeramente superior tanto la puntuación global como la asignada a los contenidos relacionados con cada una de las dos unidades (ver cuadro 8.3).

Cuadro 8.3. Resultados de la prueba inicial de Matemáticas.

| | Enseñanza ordinaria | | Enseñanza con Nuevas Tecnologías | |
|-------------------------|---------------------|-------------------|----------------------------------|-------------------|
| | Media | Desviación típica | Media | Desviación típica |
| Punt. global | 9,9293 | 3,1064 | 10,2580 | 3,2042 |
| <i>Proporcionalidad</i> | 10,2431 | 3,9322 | 10,4045 | 3,8892 |
| <i>Sucesiones</i> | 13,1850 | 4,0390 | 13,2521 | 3,9686 |

Estas diferencias pueden deberse al azar en la elección de los grupos o, quizá, a un acto inconsciente de algunos profesores al determinar en qué grupo se iba a aplicar cada metodología. El deseo de que la experiencia salga bien puede haber llevado a la selección del grupo mejor o del grupo en el que no están determinados alumnos de los que se sabe que puede haber problemas de control o de aprendizaje.

El hecho de que hubiera cuestiones sobre competencia general en Matemáticas que no estaban asignadas a ninguna de las dos unidades hace que la puntuación global sea inferior a la de cada una de las partes.

En ambas unidades los alumnos de los dos grupos se encuentran razonablemente preparados para comenzar el aprendizaje de los contenidos que se van a trabajar, aunque se observa una mejor preparación de los estudiantes para enfrentarse a la unidad sobre *Sucesiones y progresiones*. Este resultado se debe en gran medida a que los aprendizajes previos necesarios son menores que en el caso de la *Proporcionalidad*.

En los resultados de la prueba final (ver cuadro 8.4) se aprecian diferencias significativas ($p < 0.05$) a favor de los alumnos que han utilizado la enseñanza con nuevas tecnologías. Este resultado debe valorarse

con cautela por el hecho de que el grupo experimental partía con conocimientos previos algo mejores¹.

Cuadro 8.4. Resultados de la prueba final de Matemáticas.

| | Enseñanza ordinaria | | Enseñanza con Nuevas Tecnologías | |
|-------------------------|---------------------|-------------------|----------------------------------|-------------------|
| | Media | Desviación típica | Media | Desviación típica |
| Punt. global | 9,3237 | 3,5912 | 10,0037 | 3,6349 |
| <i>Proporcionalidad</i> | 10,5642 | 4,2459 | 11,2635 | 4,1850 |
| <i>Sucesiones</i> | 7,6753 | 3,7417 | 8,33 | 3,6725 |

Aunque no excesivamente significativo, se aprecia que la diferencia entre uno y otro grupo se acentúa ligeramente, tanto en la puntuación global como en la de cada una de las dos unidades. En el cuadro 8.5 se muestran las diferencias entre las puntuaciones global y por unidades de cada uno de los grupos.

Cuadro 8.5. Diferencias entre el grupo experimental y el ordinario. Prueba inicial-prueba final.

| | Prueba inicial | Prueba final |
|----------------------------|----------------|--------------|
| En la puntuación global | 0,3287 | 0,68 |
| En <i>Proporcionalidad</i> | 0,1614 | 0,6993 |
| En <i>Sucesiones</i> | 0,0671 | 0,6547 |

Esta variación se diluye, sin embargo, cuando se repite la prueba final al cabo de un cierto tiempo. Los resultados de la prueba de recuerdo recolocan a cada uno de los grupos en situaciones similares a las de partida. En el cuadro 8.6, se recogen los datos de esta última prueba.

Como es previsible, las puntuaciones en todos los aspectos evaluados disminuyen en esta nueva prueba, pero manteniéndose las posiciones relativas entre ellas. Por su parte, las diferencias entre el grupo de control y el

¹ El análisis multinivel que se está realizando permitirá una comprobación más rigurosa.

Cuadro 8.6. Resultados de la prueba de recuerdo.

| | Enseñanza ordinaria | | Enseñanza con Nuevas Tecnologías | |
|-------------------------|---------------------|-------------------|----------------------------------|-------------------|
| | Media | Desviación típica | Media | Desviación típica |
| Punt. global | 9,0820 | 3,5889 | 9,4284 | 3,7126 |
| <i>Proporcionalidad</i> | 10,3016 | 4,3196 | 10,8588 | 4,3482 |
| <i>Sucesiones</i> | 7,4613 | 3,58 | 7,5270 | 3,6717 |

experimental, que se habían hecho más pronunciadas en la prueba final, vuelven a ser similares a las de partida en la valoración global y en los contenidos de *Sucesiones*.

Cuadro 8.7. Diferencias entre el grupo experimental y el ordinario. Prueba inicial-prueba de recuerdo.

| | Prueba inicial | Prueba de recuerdo |
|----------------------------|----------------|--------------------|
| En la puntuación global | 0,3287 | 0,3464 |
| En <i>Proporcionalidad</i> | 0,1614 | 0,5572 |
| En <i>Sucesiones</i> | 0,0671 | 0,0657 |

En los contenidos de la unidad de *Proporcionalidad* se mantiene la diferencia que se había producido, aunque algo atenuada. El hecho de que el resultado sea distinto en cada una de las unidades hace pensar que el efecto de aumento de motivación para los alumnos del aula de Informática es más marcado en la unidad de *Proporcionalidad*. Los alumnos del aula ordinaria parecen tener con estos contenidos una mayor sensación de algo ya visto y sobre lo que no es necesario prestar demasiada atención.

El efecto del paso del tiempo se aprecia también, en el mismo sentido que se ha señalado, en el cuadro 8.8, que recoge las diferencias de puntuación entre la prueba final y la prueba de recuerdo. Los alumnos en el aula de Informática, si bien alcanzan unos resultados ligeramente mejores en la prueba que se les aplica inmediatamente después de la experimentación, anulan esa diferencia por ser ligeramente mayor el “olvido” a medio plazo.

Cuadro 8.8. Disminución de la puntuación por efecto del “olvido”.

| | Alumnos en su aula | Alumnos en el aula de Informática |
|-------------------|--------------------|-----------------------------------|
| Puntuación global | -0,2417 | -0,5753 |
| Proporcionalidad | -0,2626 | -0,4047 |
| Sucesiones | -0,214 | -0,803 |

En cada uno de los tipos de contenido que se han estudiado, desarrollo de conceptos, destrezas y resolución de problemas, se repiten las pautas que se han comentado en cada una de las pruebas final y de recuerdo.

El equilibrio en los resultados de los dos grupos contrasta con las expectativas mostradas por profesores y alumnos. En ambos grupos se han dedicado las mismas sesiones de clase a cada una de las dos unidades y se han obtenido resultados similares. Los profesores de Matemáticas manifestaron la sensación de falta de eficacia en el tiempo dedicado en el aula de Informática, con comentarios como:

- *Vamos muy lentos.*
- *El ordenador quita mucho tiempo.*

Esta supuesta lentitud no se refleja, sin embargo, en una disminución de los aprendizajes. Tampoco se ve reflejada la preocupación acerca de lo que se percibía como escasez de trabajo rutinario:

- *Es una asignatura para hacer ejercicios, para practicar, con lápiz y papel.*

También en el caso de las valoraciones de los alumnos los resultados en términos de aprendizaje se distancian de las expectativas y de las percepciones al final del proceso. Como ya se ha comentado, la sensación que permanece entre ellos es que en el aula ordinaria habrían aprendido más, cuando la realidad es que no ha habido diferencia.

8.3. La visión de los profesores

Los cuestionarios cumplimentados por los profesores de Matemáticas participantes proporcionan también información interesante y que se puede comparar con los resultados que se han descrito. Las hojas de registro fue-

ron completadas inmediatamente después de finalizar cada unidad didáctica. Por su proximidad pueden ayudar a interpretar lo que realmente ocurrió en las clases y permiten la comparación entre los grupos experimentales y ordinarios.

Algunas de las inquietudes manifestadas por los profesores de Matemáticas antes de comenzar la experiencia parecen haberse anulado al final del periodo de clases. Así, por ejemplo, frente a los temores iniciales, los profesores de Matemáticas participantes declaran la misma dedicación a la preparación de las clases del grupo experimental y del grupo de control. En la misma dirección, las dos terceras partes declaran haberse sentido bastante o muy cómodos llevando la clase en el aula de Informática y ninguno dice haberse sentido poco o nada cómodo. Esta opinión se ve reforzada por la sensación de haber podido atender a los diferentes ritmos de aprendizaje que planteaban sus alumnos, aspecto éste en el que la satisfacción es notablemente mayor en el aula de Informática que en el aula ordinaria, como se aprecia en el cuadro 8.9.

Cuadro 8.9. Grado de acuerdo con: *He podido atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos.*

| | Grupo experimental | Grupo ordinario |
|------------------|--------------------|-----------------|
| Nada o poco | | 8,3 % |
| Normal | 13,3 % | 75,0 % |
| Bastante o mucho | 86,7 % | 16,7 % |

La sensación de comodidad está asociada al control de la clase y al juicio que ha merecido a los profesores de Matemáticas la calidad de los materiales digitales. En todos los casos ha parecido alta o muy alta, lo que sin duda ha contribuido a tranquilizar sobre las posibilidades de aprendizaje con estos materiales. Además, los profesores quedan, en general igualmente satisfechos con la cantidad de materia trabajada cada día en los dos grupos. En ambos casos cerca del 75 % manifiestan que han trabajado cada día la parte de unidad que tenían prevista.

El orden y control de la clase es otro aspecto esencial para generar esa sensación de comodidad. También en este punto las opiniones finales desmontan los temores que se habían manifestado al principio. El clima generado en la clase se valora ligeramente más en los grupos experimentales y, en general,

se entiende que ha sido favorable al aprendizaje. Es significativa la evolución en las aulas de Informática de la primera unidad que se impartió (*Sucesiones y progresiones*) a la segunda (*Proporcionalidad*). Los datos figuran en el cuadro 8.10.

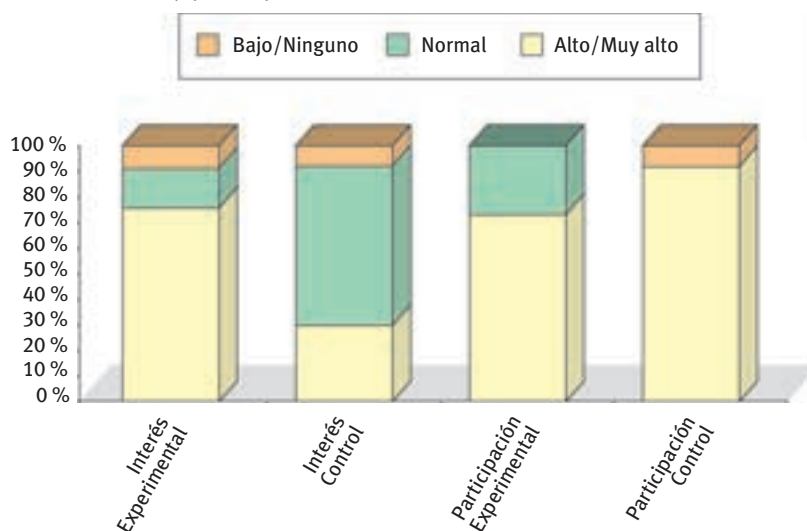
Cuadro 8.10. Grado de acuerdo en el grupo experimental con: *El clima de orden ha permitido trabajar bien.*

| | Sucesiones y progresiones | Proporcionalidad |
|------------------|---------------------------|------------------|
| Nada o poco | 28,6 % | |
| Normal | 14,3 % | 50 % |
| Bastante o mucho | 57,1 % | 50 % |

Se puede apreciar cómo la experiencia de la primera unidad ha permitido mejorar el clima de la clase a los profesores que no la consideraban controlada, hasta el punto de que ningún profesor participante lo consideraba un problema al final del proceso (ver gráfico 8.1).

La percepción de los profesores de Matemáticas confirma el previsible interés de los alumnos en las clases en las que se ha utilizado el material digital. Las dos terceras partes consideran que ha sido alto o muy alto, frente al 30 % de interés alto o muy alto que se ha notado en las aulas de control.

Gráfico 8.1. Interés y participación. Matemáticas.

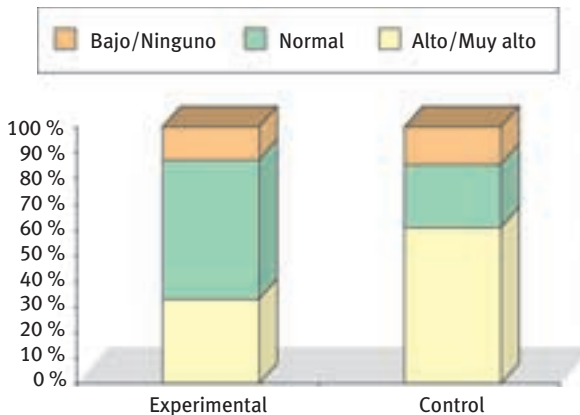


En la opinión de los profesores, sin embargo, esa apreciación del interés no se traduce de igual modo en la participación de los alumnos en la dinámica de la clase. Mientras en las aulas de Informática se valora del mismo modo el interés y la participación, en las aulas ordinarias con un interés menor se alcanza una participación bastante mayor.

Este desfase puede obedecer a que los profesores de Matemáticas participantes tienen mayor capacidad para darse cuenta de lo que está pasando en la clase ordinaria. En el aula en la que se está utilizando el material digital se percibe el interés porque los alumnos lo manifiestan abiertamente, pero no es tan fácil apreciar el grado de implicación en las actividades propuestas a través del ordenador (ver gráfico 8.2).

La dificultad para obtener información de lo que pasa en el aula de Informática se pone de manifiesto también cuando se trata de opinar sobre lo que los alumnos han aprendido por cada uno de los dos métodos. Sin conocer los resultados de las pruebas, los profesores son bastante más optimistas en los grupos que han seguido la enseñanza con libro de texto. Parece que las sesiones en el aula de Informática no han proporcionado a los profesores información fiable sobre cuál ha sido el resultado del proceso.

Gráfico 8.2. Grado de acuerdo con: *Creo que han entendido bien el contenido de la unidad que se ha trabajado.*



La enseñanza de las unidades de Matemáticas en los grupos experimentales ha dejado una cierta insatisfacción a los profesores de esta materia en lo que se refiere a los resultados que ellos deseaban en los alumnos. Una de las causas ha sido, probablemente, la falta de referencia del libro de tex-

to. La totalidad de los profesores de esta materia afirma que el aprendizaje de los alumnos habría mejorado si se hubiera utilizado, además de los materiales digitales, el libro de texto.

Sin embargo, la utilización conjunta del libro de texto y los materiales digitales habría servido para aumentar la seguridad únicamente en la tercera parte de los profesores.

Parece que el periodo en el que se ha llevado a cabo la experiencia, la formación previa y el desarrollo de las dos unidades didácticas, ha sido suficiente para que todos los profesores de Matemáticas estén dispuestos a incorporar materiales digitales a su actividad docente.