

## von Neumann y la mosca

Se cuenta que al conocido matemático John von Neumann le propusieron una vez el siguiente problema.

Dos trenes separados por una distancia de 200 km se ponen en marcha simultáneamente, uno hacia otro, a una velocidad de 50 km/h. En el mismo instante, una mosca que se encontraba posada en el extremo delantero de uno de los trenes, comienza a volar hacia el otro tren, siguiendo la vía, a una velocidad de 75 km/h. Cuando alcanza al segundo tren, gira, sin perder tiempo, y regresa hacia el primero, siempre a la misma velocidad. Cuando vuelve a llegar al primer tren vuelve a girar para dirigirse de nuevo al segundo. Y así continúa el recorrido hasta que los dos trenes se chocan con la mosca en medio. ¿Qué distancia total habrá recorrido la mosca?

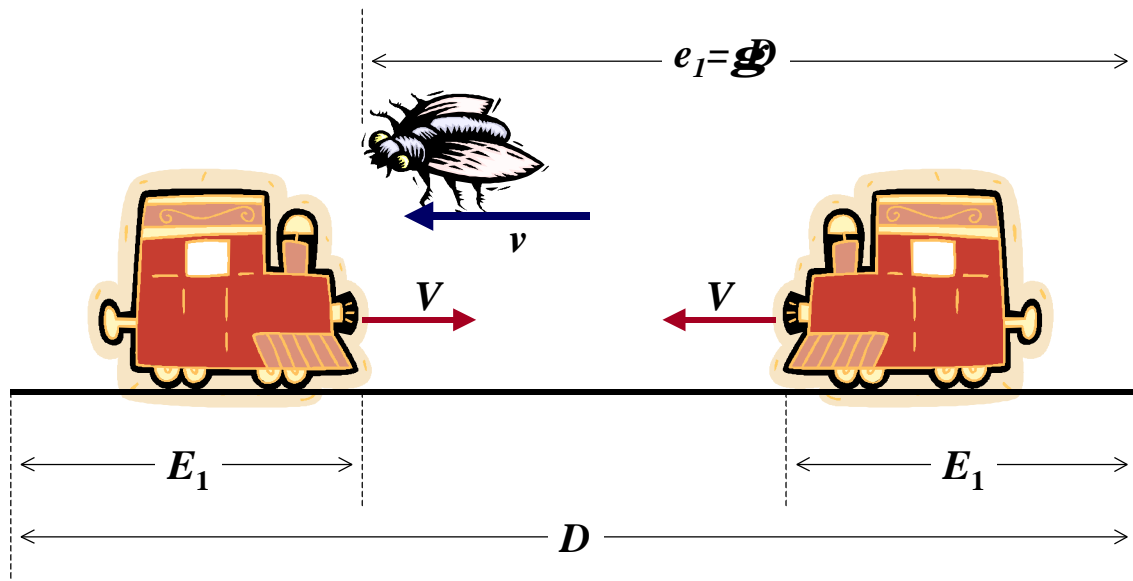
von Neumann tardó apenas unos segundos en responder “Es trivial: 150 km”. Quién se lo había propuesto dijo chasqueado: “Vaya, se ha dado cuenta inmediatamente. Mucha gente intenta sumar la serie infinita”. A lo que von Neumann contestó: “¡Así es como lo he hecho! ¿Es que hay otra forma?”.

La gracia del problema consiste en que hay una forma muy fácil de hacerlo, que solo requiere una división y una multiplicación; y otra bastante más complicada, que implica calcular la suma de una serie geométrica infinita. Mucha gente, especialmente si se trata de estudiantes de matemáticas a los que se les acaba de explicar el tema de las progresiones geométricas, se ponen inmediatamente a buscar el término general y la razón de la progresión geométrica para luego poder sumarla. Y una vez que uno ha emprendido ese camino, puede dedicarle horas sin ser capaz de darse cuenta de que hay una forma más sencilla.

El método fácil consiste simplemente en pensar que, puesto que van a la misma velocidad, cada tren ha recorrido 100 km antes del choque. Y puesto que su velocidad es de 50 km/h, el choque ha tardado 2 horas en producirse. Durante esas dos horas, volando todo el tiempo a 75 km/h, la mosca ha recorrido exactamente 150 km.

El método complicado, a pesar de requerir muchos más cálculos, está al alcance de cualquier estudiante que sepa resolver un sencillo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y que conozca la fórmula para sumar los infinitos términos de una progresión geométrica de razón menor que la unidad. Puede, por tanto, ser usado como ejercicio en clases de matemáticas de bachillerato.

Aquí presentaré la solución general, utilizando símbolos para todos los datos del problema y sustituyendo los valores al final. Para muchos estudiantes resulta más sencillo si se utilizan números desde el principio, lo que les ahorra la abstracción adicional de “trabajar con letras”.



Los símbolos que voy a emplear son los siguientes:

$D$	Distancia que separa los trenes (100 km)
$v$	Velocidad de la mosca (75 km/h)
$V$	Velocidad de los trenes (50 km/h)
$e_n$	Espacio recorrido por la mosca entre el giro $n-1$ y el giro $n$ .
$E_n$	Espacio recorrido por cada tren entre el giro $n-1$ y el giro $n$ de la mosca
$S$	La distancia total recorrida por la mosca (lo que hay que calcular)

Es evidente que la suma del espacio recorrido por la mosca desde que los trenes y ella misma se ponen en marcha hasta que llega a la cabecera del tren opuesto ( $e_1$ ) y el espacio recorrido en ese mismo tiempo por dicho tren ( $E_1$ ) debe ser igual a la distancia total  $D$ . Por otra parte, la proporción entre los espacios recorridos ( $e_1 / E_1$ ) debe ser la misma que la proporción entre las velocidades ( $v / V$ ). Tenemos por tanto un sencillo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas del que podemos calcular  $e_1$ .

$$\left. \begin{array}{l} e_1 + E_1 = D \\ \frac{e_1}{E_1} = \frac{v}{V} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{e_1}{D - e_1} = \frac{v}{V} \Rightarrow e_1 = \frac{v}{V} (D - e_1) \Rightarrow e_1 \left( 1 + \frac{v}{V} \right) = \frac{v}{V} D$$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{v}{V + v} D \Rightarrow e_1 = gD$$

dónde he introducido el nuevo símbolo  $g$  para representar abreviadamente la cantidad  $v / (v + V)$  que jugará un papel importante en los cálculos. Recapitemos. Cuando los trenes y la mosca se pusieron en movimiento les separaba una distancia  $D$ . Y desde ese momento (giro 0) hasta el momento en el que la mosca realiza su primer giro, la mosca ha recorrido una fracción  $g$  de esa distancia ( $e_1 = gD$ ) y cada tren ha recorrido una distancia  $E_1$ . En el momento del primer giro, los trenes se encuentran separados por una

distancia  $D - 2E_1$ . Aplicando exactamente el mismo razonamiento, la mosca recorrerá una fracción  $g$  de esa distancia antes del segundo giro.

Esto es,

$$\begin{aligned} e_2 &= g(D - 2E_1) = g[D - 2(D - e_1)] = g(2e_1 - D) = g\left(2e_1 - \frac{e_1}{g}\right) = \\ &= e_1(2g - 1) = e_1\left(2\frac{v}{v+V} - 1\right) = e_1\frac{v-V}{v+V}. \end{aligned}$$

Como el razonamiento es idéntico para lo que ocurre antes del tercer giro, y en realidad antes de cualquiera de los giros, podemos concluir que la sucesión  $\{e_n\}$  de distancias recorridas por la mosca entre los giros  $n-1$  y  $n$  forma una progresión geométrica de primer término  $e_1 = gD$  y razón  $2g - 1 = (v - V)/(v + V)$ . Como la razón de la progresión es menor que 1, es posible sumar sus infinitos términos. Aplicando la fórmula de dicha suma (que se estudia habitualmente junto con las progresiones geométricas) resulta

$$S = e_1 \frac{1}{1 - (2g - 1)} = D \frac{g}{1 - (2g - 1)} = D \frac{g}{2(1 - g)} = D \frac{v}{2V}.$$

Y sustituyendo los valores, se llega al mismo resultado que por el método fácil:  $S = 150$  km. ¡Ha requerido un poco más de trabajo, pero a cambio ha servido para repasar la definición y las propiedades de las progresiones geométricas!