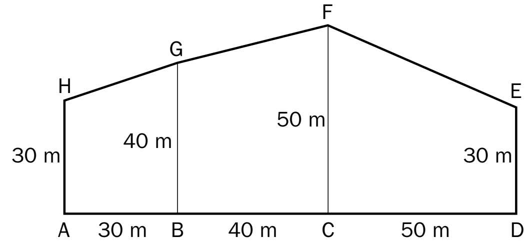
ediciones sm

Área bajo una curva. Integral definida

1. Una empresa constructora quiere comprar un terreno para lo cual realiza algunas mediciones y dibuja el plano de la figura. Calcula el valor que deberá pagar sabiendo que el metro cuadrado tiene un precio de 180 euros.



2. Se quiere calcular el área encerrada bajo la curva $y = x^2 + 2$ en el intervalo $[2, 3]$.

a) Halla las abscisas de los puntos que dividen al intervalo $[2, 3]$ en cuatro partes iguales.

b) Halla las imágenes en los puntos en que has dividido el intervalo.

c) Utiliza el método de los trapecios para aproximar el área.

3. Utiliza el método de los trapecios para aproximar el área limitada por la función $y = 2x^2 + 1$ en el intervalo $[-2, 4]$ dividiendo éste en cinco partes iguales.

4. Con ayuda del método de los trapecios, calcula una aproximación del área encerrada por la función $y = \dfrac{2}{x - 1}$ en el intervalo $[2, 4]$ cuando éste se ha dividido en cuatro partes iguales.

5. Considera la función $f(x) = 2x^2 - 1$:

a) Aplicando el método de los trapecios, calcula una aproximación del área encerrada por la función en el intervalo $[1, 3]$ cuando éste se ha dividido en cinco partes iguales.

b) Escribe una primitiva cualquiera de la función.

c) Aplicando el teorema de Barrow, calcula el área encerrada por la función en el intervalo $[1, 3]$.

d) Compara los resultados obtenidos en a y en c.

6. Considera la función $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$:

a) Aplicando el método de los trapecios, calcula una aproximación del área encerrada por la función en el intervalo $[-1, 2]$ cuando éste se ha dividido en seis partes iguales.

b) Escribe una primitiva cualquiera de la función.

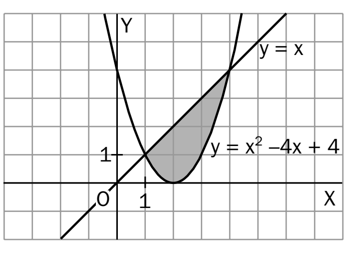
c) Aplicando el teorema de Barrow, calcula el área encerrada por la función en el intervalo $[-1, 2]$.

d) Compara los resultados obtenidos en a y en c.

7. Dada la función $y = (x - 1)^2$; dibuja la zona del plano limitada por la función y por las rectas $x = 1$ y $x = 2$ y aplicando el método de Barrow, calcula el área de la zona dibujada.

8. Calcula el área limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función $y = 2x - x^2$.

9. Expresa el área sombreada en la figura mediante una integral definida. Calcúlala aplicando el método de Barrow.



SOLUCIONES

1. El área del terreno es la suma de las áreas de los tres trapecios en que se puede dividir.

$A = A_t(ABGH) + A_t(BCFG) + A_t(CDEF) =$

$= \dfrac{(30+40)\cdot 30}{2} + \dfrac{(40+50)\cdot 40}{2} + \dfrac{(50+30)\cdot 50}{2} =$

$= 4\,850 \text{ m}^2$

Coste total $C = 4\,850 \cdot 180 = 873\,000$ euros.

2. a) Longitud de la partición: $h = \dfrac{3-2}{4} = 0{,}25$

Abscisas: $x = 2$; $x = 2{,}25$; $x = 2{,}5$; $x = 2{,}75$; $x = 3$.

b) $f(2) = 6$; $f(2{,}25) = 7{,}0625$; $f(2{,}5) = 8{,}25$; $f(2{,}75) = 9{,}5625$; $f(3) = 11$.

c) $A = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{f(2)}{2} + f(2{,}25) + f(2{,}5) + f(2{,}75) + \dfrac{f(3)}{2}\right] =$

$= \dfrac{1}{4}\,[3 + 7{,}0625 + 8{,}25 + 9{,}5625 + 5{,}5] =$

$= \dfrac{33{,}375}{4} = 8{,}34375$

3. Longitud de la partición: $h = \dfrac{4-(-2)}{5} = 1{,}2$

Abscisas: $x = -2$; $x = -0{,}8$; $x = 0{,}4$; $x = 1{,}6$; $x = 2{,}8$; $x = 4$.

$f(-2) = 9$; $f(-0{,}8) = 2{,}28$; $f(0{,}4) = 1{,}32$;

$f(1{,}6) = 6{,}12$; $f(2{,}8) = 16{,}68$; $f(4) = 33$.

$A = 1{,}2\,[4{,}5 + 2{,}28 + 1{,}32 + 6{,}12 + 16{,}68 + 16{,}5] = 56{,}88$

4. Longitud de la partición: $h = 0{,}5$.

Abscisas: $x = 2$; $x = 2{,}5$; $x = 3$; $x = 3{,}5$; $x = 4$.

$A = 0{,}5 \cdot \left[1 + \dfrac{2}{1{,}5} + 1 + 0{,}8 + \dfrac{1}{3}\right] = 2{,}2\widehat{3}$

5. a) Longitud de la partición: $h = 0{,}4$

Abscisas: $x = 1$; $x = 1{,}4$; $x = 1{,}8$; $x = 2{,}2$; $x = 2{,}6$; $x = 3$.

$A = 0{,}4\,[0{,}5 + 2{,}92 + 5{,}48 + 8{,}68 + 12{,}52 + 8{,}5] = 15{,}44$

b) $F(x) = \displaystyle\int (2x^2 - 1)\,dx = \dfrac{2}{3}x^3 - x$

c) $A = \displaystyle\int_1^3 (2x^2 - 1)\,dx = \left[\dfrac{2}{3}x^3 - x\right]_1^3 =$

$= (18 - 3) - \left(\dfrac{2}{3} - 1\right) = \dfrac{46}{3} = 15{,}\widehat{3}$

d) $15{,}44 - \dfrac{46}{3} = 0{,}1$ es el error cometido.

6. a) Longitud de la partición: $h = 0{,}5$

Abscisas: $x = -1$; $x = -0{,}5$; $x = 0$; $x = 0{,}5$; $x = 1$; $x = 1{,}5$; $x = 2$.

$A = 0{,}5\left[0{,}5 + \dfrac{2}{3} + 0{,}5 + 0{,}4 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{7} + 0{,}125\right] = 1{,}40535...$

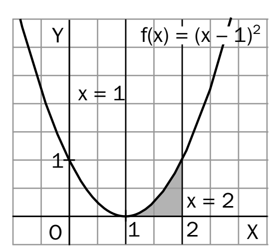
b) $F(x) = \displaystyle\int \dfrac{1}{x+2}\,dx = L\,|x + 2|$

c) $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(\dfrac{1}{x+2}\right) dx = \Big[L\,|x + 2|\Big]_{-1}^{2} =$

$= L4 - L1 = 1{,}38629...$

d) $1{,}40535... - 1{,}38629... = 0{,}019$ es el error cometido.

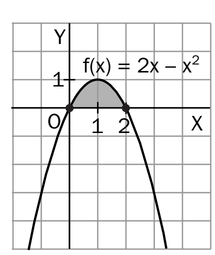
7.



$A = \displaystyle\int_1^2 (x - 1)^2\,dx =$

$= \left[\dfrac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2 = \dfrac{1}{3}\,u^2$

8.



$A = \displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)\,dx =$

$= \left[x^2 - \dfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 4 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{4}{3}\,u^2$

9. Puntos de corte de las dos funciones: (1, 1) y (4, 4)

$A = \displaystyle\int_1^4 \left[x - (x^2 - 4x + 4)\right] dx =$

$= \displaystyle\int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx = \left[-\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^4 =$

$= 4{,}5\,u^2$