Derivadas

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 4$ en los intervalos $[0, 2]$ y $[-2, 0]$.

2. Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo $[a, a + h]$.

a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = x^2 + 2x$

3. Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indica.

a) $f(x) = 3x + 2$ en $x = 2$ y $x = -1$

b) $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 0$ y $x = 3$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ en $x = -2$ y $x = 2$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$ y $x = 4$

4. Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en el punto genérico $x = a$.

a) $f(x) = x^2 - 3$ b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

5. Calcula el valor de la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = 3x + 2$ en $x = 2$ b) $f(x) = x^2 + x - 1$ en $x = 1$ c) $f(x) = \dfrac{2}{x + 3}$ en $x = -1$

6. Halla la función derivada de las siguientes funciones utilizando la definición.

a) $D(3x)$ b) $D(x + 3)$ c) $D(x^2 + 3)$

7. Halla la función derivada de las siguientes funciones utilizando la definición.

a) $D\,\dfrac{x}{x + 1}$ b) $D\sqrt{3x}$ c) $D\sqrt{x + 3}$

8. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 + 2x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

9. Halla el punto de corte del eje OX con la recta tangente a $f(x) = x^2 - 2x$ en el punto de abscisa $x = -1$.

10. ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + 8$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Escribe la ecuación de dicha recta tangente.

11. El espacio en metros recorrido por un móvil viene dado por la función $s(t) = 3t^2 - 1$, t en segundos.

a) Halla la velocidad media del móvil en el intervalo temporal $[1, 4]$.

b) Obtén la velocidad instantánea para $t = 2$ segundos.

SOLUCIONES

1. $TVM_{[0,\,2]} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{0 - (-4)}{2} = 2$

$TVM_{[-2,\,0]} = -2$

2. a) $TVM_{[a,\,a+h]} = \dfrac{(a + h) + 3 - (a + 3)}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$

b) $TVM_{[a,\,a+h]} = 2a + 2 + h$

3. a) $TVI(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(2 + h) + 2 - 8}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

$TVI(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(-1+h)+2-(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

b) $TVI(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 - 1 - (-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$

$TVI(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+ h)^2-1-8}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h + 6) = 6$

c) $TVI(-2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{h-2}{h-1} - 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{(h-1)} = 1$

$TVI(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{h+2}{h+3} - \dfrac{2}{3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{3(h+3)} = \dfrac{1}{9}$

d) $TVI(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \dfrac{1}{2}$

$TVI(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \dfrac{1}{4}$

4. a) $TVI(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(a+h)^2 - 3 - (a^2 - 3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} (h + 2a) = 2a$

b) $TVI(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h-1} - \sqrt{a-1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a-1}}$

5. a) $Df(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(2+h) + 2 - 8}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

b) $Df(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 + (1+h) - 1 - 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} (3 + h) = 3$

c) $Df(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2}{h+2} - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{h+2} = -\dfrac{1}{2}$

6. a) $D(3x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(x+h) - 3x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

b) $D(x + 3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h+3) - (x+3)}{h} = 1$

c) $D(x^2 + 3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 + 3 - (x^2+3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} (2x + h) = 2x$

7. a) $D\dfrac{x}{x+1} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{x+h}{x+h+1} - \dfrac{x}{x+1}}{h} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

b) $D\sqrt{3x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$

c) $D(\sqrt{x+3}) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h+3} - \sqrt{x+3}}{h} =$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

8. $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$f(1) = 2;\ f'(x) = 2x + 2;\ f'(1) = 4$

$y - 2 = 4 \cdot (x - 1)$

9. $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1);$

$f(-1) = 3;\ f'(x) = 2x - 2;\ f'(-1) = -4$

$y - 3 = -4 \cdot (x + 1)$

El punto es $\left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)$.

10. La pendiente debe ser $m = 1$.

$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow 2x - 5 = 1 \Rightarrow x = 3$

El punto es (3, 2).

La ecuación de la tangente es $x - y - 1 = 0$.

11. a) $v_m = \dfrac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \dfrac{47 - 2}{3} = 15$ m/s

b) $v_i = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim\limits_{x\to 0} (3h + 12) =$

$= 12$ m/s