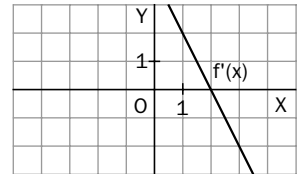


## Estudio y representación de funciones

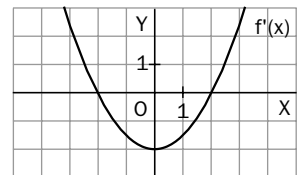
1. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Calcula su dominio y dibuja su gráfica.
- Define la función  $f$  en  $x = 0$  para que sea continua en ese punto.
- Estudia si, al dar a  $f(0)$  el valor obtenido en el apartado anterior, la función es derivable en  $x = 0$ .

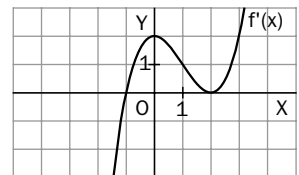
2. Una función  $f(x)$  tiene por derivada  $f'(x)$  cuya gráfica es la dada en la figura. Escribe los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f(x)$  e indica dónde tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión.



3. Una función  $f(x)$  tiene por derivada  $f'(x)$  cuya gráfica es la dada en la figura. Escribe los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f(x)$  e indica dónde tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión.



4. Una función  $f(x)$  tiene por derivada  $f'(x)$  cuya gráfica es la dada en la figura. Escribe los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f(x)$  e indica dónde tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión.



5. Halla las asíntotas de la función  $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$  y comprueba si en algún caso la asíntota corta a la gráfica de la función, calculando el punto de corte.

6. Halla las asíntotas de la función  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  y comprueba si en algún caso la asíntota corta a la gráfica de la función, calculando el punto de corte.

7. Representa las siguientes funciones:

- $f(x) = x^2 + 2x - 3$
- $f(x) = 6x - x^2$

8. Representa las siguientes funciones:

- $f(x) = x^3 - 3x + 2$
- $f(x) = (x + 1)^3$

9. Representa las siguientes funciones:

- $f(x) = -\frac{x}{x+1}$
- $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$

# SOLUCIONES

1. a) Dominio  $\mathbb{R} - \{0\}$

b)  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

c)  $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f'(0^-) = 0$  y  $f'(0^+) = -1$

Como las derivadas laterales son distintas, la función no es derivable en  $x = 0$ .

2. Si  $x < 2 \Rightarrow f'(x) > 0$ :  $f(x)$  es creciente.

Si  $x > 2 \Rightarrow f'(x) < 0$ :  $f(x)$  es decreciente.

$f'(2) = 0$  y  $f'$  pasa de ser positiva a ser negativa  $\Rightarrow f(x)$  tiene un máximo en  $x = 2$ .

Como  $f'(x)$  es decreciente,  $f(x)$  es siempre cóncava y no tiene puntos de inflexión.

3. Si  $x < -2$  o  $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$ :  $f(x)$  es creciente.

Si  $-2 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0$ :  $f(x)$  es decreciente.

En  $x = -2$ ,  $f'(-2) = 0$  y  $f'$  pasa de ser positiva a ser negativa  $\Rightarrow f(x)$  tiene un máximo en  $x = -2$ .

En  $x = 2$ ,  $f'(2) = 0$  y  $f'$  pasa de ser negativa a ser positiva  $\Rightarrow f(x)$  tiene un mínimo en  $x = 2$ .

En  $x = 0$ ,  $f'(x)$  pasa de ser decreciente a ser creciente  $\Rightarrow f(x)$  pasa de ser cóncava a ser convexa y, por tanto, hay un punto de inflexión.

4. Si  $x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0$ :  $f(x)$  es decreciente.

Si  $x > -1 \Rightarrow f'(x) > 0$ :  $f(x)$  es creciente.

En  $x = -1$ ,  $f'(-1) = 0$  y  $f'$  pasa de ser negativa a ser positiva  $\Rightarrow f(x)$  tiene un mínimo en  $x = -11$ .

En  $x = 0$  y en  $x = 2$  cambia el crecimiento de  $f'(x) \Rightarrow$  cambia la curvatura de  $f(x)$  y, por tanto, hay puntos de inflexión.

5. El denominador se anula en  $x = -2$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1-x}{x+2} = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2} = +\infty$ ,

$x = -2$  es asíntota vertical.

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x+2} = -1$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x+2} = -1$ ,

$y = -1$  es asíntota horizontal.

El sistema  $\begin{cases} y = \frac{1-x}{x+2} \\ y = -1 \end{cases}$  no tiene solución.

No hay puntos de corte con la asíntota.

6. No tiene asíntotas verticales ya que el denominador no se anula.

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0$ ,

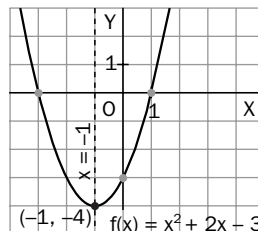
$y = 0$  es asíntota horizontal.

$\begin{cases} y = \frac{x+1}{x^2+1} \\ y = 0 \end{cases}$  tiene como solución  $x = -1$

$(-1, 0)$  es el punto de corte con la asíntota.

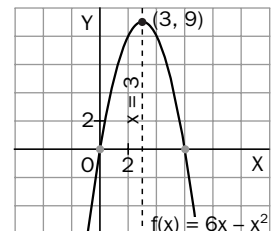
7. a)  $f'(x) = 2x + 2$

$f''(x) = 2$



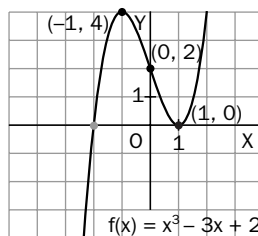
b)  $f'(x) = 6 - 2x$

$f''(x) = -2$



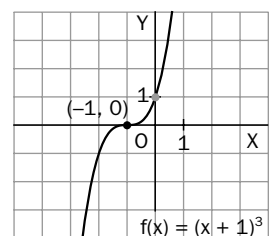
8. a)  $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$



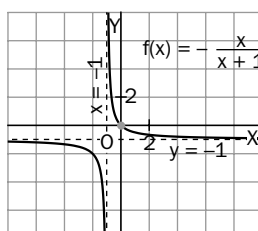
b)  $f'(x) = 3(x+1)^2$

$f''(x) = 6(x+1)$



9. a)  $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$



b)  $f'(x) = -\frac{x(x-2)}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$

