ediciones sm

Funciones: límites y continuidad

1. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x \to 3} (x^2 - 2x + 1)$ b) $\lim_{x \to 0} (x^4 + x - 3)$ c) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 2)$

2. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x \to +\infty} (4 - x^2)$ b) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 3)$ c) $\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + 5)$

3. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x}$

4. Calcula los límites laterales de las siguientes funciones racionales en los puntos en los que no están definidas. ¿Existe el límite de la función en esos puntos?

a) $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - x}$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3}$ b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 4}{x + 1}$

6. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - x}$ b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$

7. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x)$ b) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

8. Calcula los siguientes límites utilizando funciones equivalentes en $x = 0$:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 5x}$ c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{5x}{\text{tg } 2x}$ d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \cdot (1 - \cos x)}{\text{sen}^2 x}$

9. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones a trozos.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x + 2} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

10. Una función $f(x)$ está dada por la expresión $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ si $x \neq 1$. ¿Cómo elegirías el valor de $f(1)$ para que la función fuera continua en ese punto?

11. Calcula el valor de a para el que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x < 3 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$.

SOLUCIONES

1. a) 4 b) -3 c) $+\infty$

2. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$

3. a) -1

b) Tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-x^3+3x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3-x^2+3)\cdot x}{(x-1)\cdot x}=-3$$

4. a) $f(x)=\frac{3}{x-2}$, no está definida en $x=2$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

No existe el límite ya que los límites laterales son distintos.

b) $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2-x}$, no está definida en $x=0$ y $x=1$.

En $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot(x-3)}{x\cdot(x-1)}=3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot(x-3)}{x\cdot(x-1)}=3$$

Como los límites laterales son iguales $\lim_{x\to 0} f(x)=3$.

En $x=1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

No existe el límite ya que los límites laterales son distintos.

5. Todos estos límites tienen indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

a) Dividiendo por x^2, $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+3}=1$

b) Dividiendo por x, $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+4}{x+1}=-\infty$

6. Todos estos límites tienen indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\,(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})\,(1+\sqrt{x})}=2$$

b) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)\,(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)\,(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{4}$$

7. Los límites de este ejercicio presentan indeterminación del tipo $\infty-\infty$.

a) $$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-4}-x)=$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4}-x)\cdot(\sqrt{x^2-4}+x)}{(\sqrt{x^2-4}+x)}=0$$

b) $$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}=\frac{1}{2}$$

8. Estos límites tienen indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{10x}{5x}=2$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\text{tg } 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1-\cos x)}{\text{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1-\cos x)}{x^2}=0$

9. a) $f(0)=-1$; $\lim_{x\to 0^-} f(x)=3$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1$

No es continua en $x=0$.

b) $f(1)=1$; $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$

Es continua en $x=1$ ya que $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=1$.

$f(3)=5$; $\lim_{x\to 3^-} f(x)=7$, $\lim_{x\to 3^+} f(x)=5$

No es continua en $x=3$.

c) $f(2)=2$; $\lim_{x\to 2^-} f(x)=2$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)=2$

Es continua en $x=2$ ya que $f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=2$.

10. Debe ser $f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1} x=1$

11. Para que sea continua en $x=3$ debe ser:

$f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$

$f(3)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=13$; $\lim_{x\to 3^-} f(x)=9-a \Rightarrow$

$\Rightarrow 13=9-a$

Por tanto $a=-4$.