# Monotonía y curvatura

**1.** Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 12x$ y calcula sus extremos relativos.

**2.** Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{2x - 2}$$

**3.** Estudia la curvatura de la función $f(x) = \sqrt{x - 3}$ y determina sus puntos de inflexión.

**4.** Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión, si los tiene, de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y estudia su curvatura.

**5.** La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ tiene un máximo en el punto $P(0, 1)$. Calcula los valores de a y b.

**6.** Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + 5$, halla el valor de a para que tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando $x = 1$.

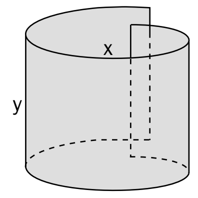
**7.** La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una competición de atletismo de tres horas de duración viene dada por la función $f: [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 100t \cdot (3 - t)$, donde t mide el tiempo en horas.

a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en que disminuye.

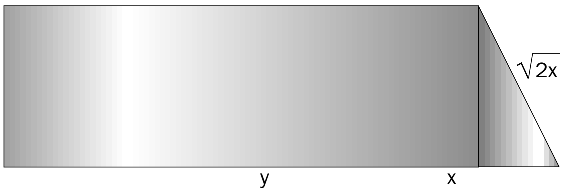
b) ¿En qué momento de la competición la capacidad de concentración de esta deportista es nula?

c) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la atleta pueda batir su propia marca?

**8.** Halla la base x y la altura y de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar la vuelta completa a un lado vertical, genera un cilindro de volumen máximo.




**9.** Una figura de cuatro metros de perímetro está formada por un rectángulo al que se encuentra adosado un triángulo rectángulo isósceles, siendo el lado común uno de los catetos. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de esta figura para que su área sea máxima?



# SOLUCIONES

**1.** Dominio: $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3\,(x + 2)\,(x - 2)$

Posibles puntos críticos $x = -2$ y $x = 2$.

| | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x + 2$ | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $x - 2$ | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $f'(x) = 3(x + 2)(x - 2)$ | $+$ | | $-$ | | $+$ |

La función es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$ y es decreciente en $(-2, 2)$.

$f''(x) = 6x$; $f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2, f(-2)) = (-2, 16)$ es un máximo relativo

$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow (2, f(2)) = (2, -16)$ es un mínimo relativo.

**2.** Dominio: $\mathbb{R} - \{1\}$; $f'(x) = \dfrac{x \cdot (x - 2)}{2(x - 1)^2}$

La derivada primera se anula en $x = 0$ y $x = 2$.

| | | $0$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{2(x-1)^2}$ | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |

La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$ y es decreciente en $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

A partir de los intervalos de crecimiento:

$(0, f(0)) = (0, 0)$ es un máximo relativo y

$(2, f(2)) = (2, 2)$ es un mínimo relativo.

**3.** Dominio: $[3, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x - 3}}$ $\qquad f''(x) = -\dfrac{1}{4(x - 3)\sqrt{x - 3}}$

Como la derivada segunda es negativa en todo el dominio, la función es cóncava en $[3, +\infty)$.

No tiene puntos de inflexión.

**4.** Dominio: $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\,(x - 1)\,(x - 3)$

La derivada primera se anula en $x = 1$ y $x = 3$.

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$ y es decreciente en $(1, 3)$.

$(1, 4)$ es un máximo relativo y $(3, 0)$ es un mínimo relativo.

$f''(x) = 6x - 12$ se anula en $x = 2$.

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 2)$ y es convexa en $(2, +\infty)$.

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

**5.** $f(0) = 1 \Rightarrow b = 1$. $f'(x)$ debe anularse en $x = 0$:

$f'(x) = 3x^2 - 4x + a$; $f'(0) = a \Rightarrow a = 0$

Para este valor $f''(0) = -4 < 0$,

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ tiene un máximo en $P(0, 1)$.

**6.** $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2x$ debe anularse en $x = 1$,

$0 = f'(1) = 6 + 3a \Rightarrow a = -2$

Para este valor $f''(1) > 0$, $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 1$.

**7.** a) $f'(t) = 300 - 200t$ y $f''(c) = -200$.

$f'(t)$ se anula en $t = 1{,}5$ y $f''(1{,}5) = -200 < 0$ por lo que se alcanza un máximo.

La capacidad de concentración aumenta durante la primera hora y media y disminuye a partir de la hora y media.

b) $f(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ y $t = 3$.

La capacidad de concentración es nula al comienzo y al final de la competición.

c) $f''(1{,}5) = -200$

La capacidad de concentración es máxima a la hora y media del comienzo de la competición.

**8.** Perímetro: $60 = 2x + 2y \Rightarrow y = 30 - x$.

El radio de la base será $x = 2\pi\, r \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$

El volumen del cilindro es:

$V(x, y) = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot y$

$V(x) = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot (30 - x) = \dfrac{30x^2 - x^3}{4\pi}$

Buscamos el máximo de $V(x)$:

$V'(x) = \dfrac{60x - 3x^2}{4\pi}$; $V'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$

Como $V''(20) < 0$, se alcanza el volumen máximo para $x = 20$ cm, $y = 10$ cm.

**9.** Perímetro: $2x + 2y + \sqrt{2}x = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2 - \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}x$

Área: $A(x, y) = xy + \dfrac{1}{2}x^2$

$A(x) = x\left(2 - \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}x\right) + \dfrac{1}{2}x^2 = 2x - \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}x^2$

$A'(x) = 2 - (1 + \sqrt{2})x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{1 + \sqrt{2}}$

Como $A''\left(\dfrac{2}{1 + \sqrt{2}}\right) < 0$, el área es máxima para

$x = \dfrac{2}{1 + \sqrt{2}} \approx 0{,}83$ m, $y = -\sqrt{2} \approx 0{,}59$ m.